EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….007**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine numărul real a astfel încât punctul $M\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3},1\right)$ să aparțină elipsei $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a}=1$.

(4p) **b)** Să se determine punctele de intersecție ale dreptei de ecuație $x+3y-7=0$ cu axele de coordonate.

(4p) **c)** Să se calculeze distanța de la punctul $M(2,3)$ la dreapta $y=-x$.

(4p) **d)** Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(-1, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ să aparțină planului de ecuație $ax+by+cz+6=0$.

(2p) **e)** Să se determine cel mai mare dintre numerele $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{2}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\cos^2 1+\sin^2 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^4-6X^3+13X^2-12X+4$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\left(X^2-3X+2\right)^2$.

(3p) **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f .

(3p) **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X+1$.

(3p) **d)** Să se determine suma coeficienților polinomului $\left(X^2-3X+2\right)^4$.

(3p) **e)** Să se determine cea mai mică valoare a funcției $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=x^2-3x+2$**.**

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

(3p) **a)** Să se arate că $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$.

(3p) **b)** Să se determine partea întreagă a numărului real $S = f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$.

(3p) **c)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

(3p) **d)** Să se determine asimptotele verticale la graficul funcției f .

(3p) **e)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $H=\left\{A\in \mathrm{M}_3(\mathbf{Q})\,\middle|\,\det(A)\neq 0,\ A^{-1}=A^2+A\right\}$ şi matricele

$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se determine inversa matricei $X=a\cdot I_3$, unde $a\in\mathbf{R}^*$.

(4p) **b)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbf{Q}$, matricea $X=a\cdot I_3$ nu se află în H.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $A\in H$, atunci $A^3+A^2-I_3=O_3$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $A\in H$, atunci $A^5=I_3-A$.

(2p) **e)** Să se arate că matricea $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\in H$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A\in H$ şi $P\in M_3(\mathbf{Q})$ este o matrice inversabilă, atunci $P^{-1}\cdot A\cdot P\in H$.

(2p) **g)** Să se arate că mulțimea H conține cel puțin 2007 elemente .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n=\int_0^1 x^{2n}\sin x\,dx$ şi funcția

$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin x,\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$

(4p) **a)** Să se calculeze I_1.

(4p) **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este concavă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(2p) **d)** Să se arate că $\frac{2}{\pi}\cdot x<\sin x<x,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{1}{\pi(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n+1)},\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că
$I_n=2n\cdot\sin 1-\cos 1-2n(2n-1)\cdot I_{n-1},\ \forall\, n\in\mathbf{N},\ n\geq 2$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(nI_n)$.